Single Value Decomposition (SVD)

# Spektralsætningen – Symmetriske matricer

Hvis en matrix er symmetrisk, altså hvis kan den som bekendt diagonaliseres. Det betyder, at samtlige egenværdier for er reelle, og at der findes en ortogonal matrix , så:

Her er en diagonalmatrix bestående af ’s egenværdier og består af søjler af tilsvarende egenvektorer. Da er ortogonal følger, at .

Spørgsmålet er om man kan gøre noget tilsvarende, hvis ikke er symmetrisk. Eller måske ikke engang en kvadratisk matrix. Det viser sig, at der er en generalisering, på engelsk kaldet *single value decomposition*.

# Om og

Lad uden yderligere restriktioner. Betragt nu matricen . . Og der gælder:

Matricen er altså symmetrisk, og kan derfor diagonaliseres ifølge spektralsætningen. Lad nu vi ser:

Her betegner dobbeltstregerne den sædvanlige norm for , og uligheden følger af de sædvanlige egenskaber for normer. Dermed ses det, at er positivt semidefinit.

Tilsvarende er og der gælder:

Så denne matrix er ligeledes diagonaliserbar. Også er positivt semidefinit. Lad nemlig :

# Single value decomposition

For er altså diagonaliserbar. Der eksisterer altså en ortonormal basis af egenvektorer således at:

Gang nu med på begge sider:

Da er positivt semidefinit er egenværdierne ikke-negative: . For alle sættes:

For to sådanne vektorer gælder der:

(Undervejs er den første identitet vi udledte brugt). Disse vektorer er altså ortonormale. Suppler nu op til en ortonormal basis for , i alt .

Definer nu og ved at bruge hhv. ’er og ’er som søjler:

og

Begge matricer er ortogonale, og der gælder derfor og .

Beregn nu matricen :

er altså diagonal i den forstand at de eneste indgange der ikke er nul er af formen . Ligningen kan omskrives:

Dette er SVD.